

28 Arithmétique, Calcul différentiel et Optimisation

28.A Questions de cours :

1. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si c'est un anneau intègre si et seulement si n est premier
2. Théorème chinois
3. Un groupe est monogène fini si et seulement si il est cyclique
4. Morphismes de groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
5. différentielle d'une application différentiable en un extremum local.
6. Application constante sur un ouvert convexe

28.B Exercices arithmétique :

Exercice 1: ** Quelques équations de congruences

1. Réduire dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $a : a^2 - \overline{100} = \overline{0}$
2. Réduire dans $\mathbb{Z}/121\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $a : a^2 - \overline{100} = \overline{0}$
3. Réduire dans $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $a : a^2 + \overline{11}a - \overline{12} = \overline{0}$

Exercice 2: *** Une drôle de somme

Soit p un nombre premier. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} a^k$ vaut soit 0 soit 1 (et préciser quand se présente chacun des deux cas).

Exercice 3: **** Idéaux premiers et radical d'un idéal

On dit qu'un idéal I d'un anneau A est premier lorsque :
si $ab \in I$ alors $a \in I$ ou $b \in I$.

1. Montrer que les idéaux premiers de \mathbb{Z} sont de la forme $p\mathbb{Z}$ pour p premier.
2. Montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme $\langle P \rangle$ pour un certain polynôme P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

On appelle radical d'un idéal I l'ensemble $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\}$.

3. Montrer que \sqrt{I} est un idéal
4. Montrer que si I est un idéal premier d'un anneau A alors $I = \sqrt{I}$

Exercice 4: ** 2 idéaux c'est un corps !

Montrer qu'un anneau qui n'a que deux idéaux est un corps

Exercice 5: *** Où sont les irréductibles ?

1. Quels sont les irréductibles de degré 2 et 3 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$?
2. Quels sont les irréductibles de degré 4 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 6: * Les groupes d'ordre 4

Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 7: ** Que des éléments d'ordre 2

Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

Exercice 8: ** Partitionnement par les ordres**

Soit G un groupe cyclique d'ordre n .

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique
2. Soit d un diviseur positif de n . Montrer que G admet un unique sous-groupe d'ordre d .
3. Montrer que
$$\sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|n}} \varphi(d) = n$$

Exercice 9: ** Sous-groupe d'un groupe d'inversibles**

Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

1. Donner la liste de tous les éléments de G .
2. Pour tout $a \in G$, déterminer le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par a .
3. Déterminer un ensemble minimal de générateurs de (G, \cdot) .
4. (G, \cdot) est-il un groupe cyclique ?
5. Déterminer tous les sous-groupes de G et, pour chaque sous-groupe, préciser un ensemble de générateurs.
6. Parmi les sous-groupes de (G, \cdot) , lesquels sont isomorphes à un groupe additif $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 10: ** Diviseurs**

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p .

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. Montrer que si p_1, \dots, p_r sont les diviseurs premiers de n , les événements A_{p_1}, \dots, A_{p_r} sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.

28.C Exercices calcul différentiel

Exercice 1: * Différentielle du déterminant**

1. Calculer la différentielle du déterminant en I_n
2. En déduire la différentielle du déterminant en $A \in GL_n(\mathbb{R})$
3. En déduire la différentielle du déterminant en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 2: ** Différentielle de l'inverse matriciel

Soit $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

1. Démontrez que ϕ est différentiable en I_n et calculez sa différentielle en ce point.
2. Même question en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 3: ** Puissances de matrice

Soit $p \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, on pose $\phi_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; M \mapsto M^p$. Montrer que ϕ_p est différentiable et donner sa différentielle.
En déduire que l'exponentielle matricielle est différentiable en 0.

Exercice 4: ** Produit scalaire

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur \mathbb{R}^n et soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Calculer la différentielle de $x \mapsto \langle f(x), f(x) \rangle$.
En déduire la différentielle de $N = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Exercice 5: * La norme au quotient**

Soit $f : E \setminus \{0\} \rightarrow E \setminus \{0\} ; x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Montrer que f est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 6: * Gradient affine**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{2} \|x\|_A^2 - {}^t x b \end{cases}$$

où $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$ est le produit scalaire associé à la matrice A .
Montrer que $\nabla \phi(x) = Ax - b$.

Exercice 7: ** Multiplication dans la norme 44.3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ un réel. Soit

$$f_a : \begin{cases} E \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|ax\| \end{cases}$$

Montrer que f_a est différentiable et donner son gradient.

Exercice 8: * Majoration de la norme du gradient i.e. IAF**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit C un ouvert convexe de E . Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que pour tout $x \in E$, on a $\|\nabla f(x)\| \leq 2025$.
Montrer que pour tout couple (a, b) d'éléments de C on a :

$$|f(a) - f(b)| \leq 2025 \|a - b\|.$$

Exercice 9: ** Continuité et dérivées directionnelles

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0, 0)$. Est-elle continue en ce point ?

Exercice 10: * Continuité

Etudier la continuité en $(0, 0)$ de l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 3xy^2}{x+y} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 11: * Classe \mathcal{C}^1**

Soit

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que F est \mathcal{C}^1 .

Exercice 12: * Classe \mathcal{C}^1 (2)**

Soit

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que F est \mathcal{C}^1 .

Exercice 13: * Construction à partir d'une forme linéaire**

Soit E un \mathbb{R} -evn. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue (automatique seulement en dimension finie). Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \varphi(x)x.$$

Montrer que f est différentiable sur E , donner sa différentielle et en déduire que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 14: * Les cordes vibrantes**

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe \mathcal{C}^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at, v = x + bt$.

28.D Exercices optimisation**Exercice 1: *** Extrema locaux d'une fonction de 3 variables**

Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 4(x + y + z)$ et préciser leur nature.

Exercice 2: * Points critiques et extrema d'une fonction de deux variables**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x^4 - \frac{1}{3}y^3 - xy^2 + 1$. Déterminer ses extrema et leur nature.

Exercice 3: *** Extrema liés

Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \exp(axy), a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice 4: *** Inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$. On note $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n; x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

1. Démontrez que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a

$$\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Exercice 5: *(*)** Valeur propre d'une matrice symétrique réelle

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \langle Av, v \rangle \end{cases}$.

En utilisant le théorème des extrema liés, justifier que A admet une valeur propre.